

# Concours d'entrée pour le Master Son de l'ENS Louis-Lumière session 2026

## Phase 2 : sujet de mathématiques - physique : éléments de correction

Laurent Millot  
l.millot@ens-louis-lumiere.fr

16 octobre 2026

**Durée de l'épreuve : 1h15**

### Consignes :

- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Pour chaque réponse, vous devez indiquer le numéro de la question à laquelle elle correspond.
- Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de vos réponses.
- Aucun résultat sans démonstration et/ou explication ne sera accepté.
- A la fin de l'épreuve, il faut rendre l'intégralité de ce document agrafé ; il vous incombe de vérifier que le document rendu est complet.
- Respect de l'anonymat : aucun nom, élément ou signe distinctif ne doit apparaître sur votre copie, sous peine d'exclusion du concours.

Dans le sujet,  $t$  est un réel qui définit une variable temporelle tandis que  $\omega$  est un réel qui désigne une variable fréquentielle. Le nombre imaginaire  $i$  est défini par  $i^2 = -1$ .

**Problème 1 :** Soit  $H(p)$  la fonction de la variable  $p \in \mathbb{C}$ ,  $H(p) = \frac{p^3 - 2p^2 + (4 + 4i)p - 8}{p^3 + 4p}$ .

**Question 1 (2 points)** Déterminez la décomposition en éléments simples de  $H(p)$ .

Comme le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, la décomposition en éléments simples comporte un terme constant en plus des éléments simples. Une division euclidienne ou l'apparition du dénominateur au numérateur permet de trouver cette constante.

$$H(p) = \frac{p^3 - 2p^2 + (4 + 4i)p - 8}{p^3 + 4p} = \frac{p^3 + 4p - 2p^2 + 4ip - 8}{p(p^2 + 4)} = 1 + \frac{-2p^2 + 4ip - 8}{p(p^2 + 4)} = 1 - 2 \cdot \frac{p^2 - 2ip + 4}{p(p^2 + 4)}$$

Le dénominateur s'écrit encore :  $p(p^2 + 4) = p(p - 2i)(p + 2i)$ , donc on a trois pôles et donc trois éléments simples d'ordre 1 dans la décomposition de  $H(p)$ .

$$\text{Ainsi, } H(p) = 1 - 2 \cdot H_1(p) \text{ avec } H_1(p) = \frac{p^2 - 2ip + 4}{p(p - 2i)(p + 2i)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p - 2i} + \frac{c}{p + 2i}.$$

$$a = \left. \frac{p^2 - 2ip + 4}{p^2 + 4} \right|_{p=0} = \frac{4}{4} = 1$$

$$b = \left. \frac{p^2 - 2ip + 4}{p(p + 2i)} \right|_{p=2i} = \frac{-4 + 4 + 4}{2i \cdot 4i} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$c = \left. \frac{p^2 - 2ip + 4}{p(p - 2i)} \right|_{p=-2i} = \frac{-4 - 4 + 4}{-2i \cdot (-4i)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{On a donc } H(p) = 1 - 2 \cdot \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p - 2i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p + 2i} \right).$$

$$\text{Soit au final : } H(p) = 1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p - 2i} - \frac{1}{p + 2i}.$$

**Problème 2 :** Dans les questions 2 et 3, on note  $s(t) = e^{-pt}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$  où  $p = \alpha + i\omega$  avec  $\alpha$  et  $\omega$  deux nombres réels strictement positifs. Dans les questions 4 à 7, on utilise les résultats des questions 2 et 3.

**Question 2 (1 point) :** Expliquez pourquoi  $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = 0$ .

On peut écrire que  $s(t) = e^{-(\alpha+i\omega)t} = e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\omega t}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .

On constate que  $s(t)$  est le produit d'une fonction exponentielle décroissante  $e^{-\alpha t}$  (puisque  $\alpha > 0$ ), qui tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , par une fonction bornée puisque  $|e^{-i\omega t}| = 1$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .

D'après les résultats connus sur les limites, la limite de  $s(t)$  est donc 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

**Question 3 (1 point) :** Expliquez pourquoi  $\frac{d}{dt}[s(t)] = -p \cdot s(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ .

Méthode 1 : utilisation de la référence à la dérivée de fonction composée, puis, du fait que l'exponentielle est dérivable pour les  $x$  pour lesquels  $u(x)$  existe et est dérivable, et, enfin, du fait qu'ici  $u(x) = \alpha + i\omega x$  qui est une fonction dérivable pour  $x$  puisque que polynomiale (à valeurs complexes).

$$\frac{d}{dx}[e^{u(x)}] = \frac{d}{dx}[u(x)] \cdot e^{u(x)} \text{ avec } \frac{d}{dx}[u(x)] = -p, \forall t \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{d'où le résultat à démontrer : } \frac{d}{dt}[s(t)] = -p \cdot s(t), \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Méthode 2 : développement de  $e^{-(\alpha+i\omega)t} = e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\omega t} = e^{-\alpha t} \cdot [\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)]$ , puis, utilisation du résultat pour la dérivée d'un produit de fonctions dérivables (sur le même intervalle) :

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}[g(x)]$$

et, enfin, après un développement des expressions suivi d'une re-factorisation du résultat pour refaire apparaître le facteur  $s(x) = e^{u(x)}$ , on aboutit au résultat à démontrer.

Dans les questions 4 à 7, on étudie la famille d'intégrales  $I_n(p) = \int_{0+}^{+\infty} t^n \cdot e^{-pt} dt$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Question 4 (1 point) :** Démontrez que  $I_0(p) = \frac{1}{p}$ .

$$I_0(p) = \int_{0+}^{+\infty} t^0 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{0+}^t e^{-px} dx$$

Une primitive de  $e^{-px}$  est  $\frac{-e^{-px}}{p}$  lorsqu'on considère que la variable d'intégration est  $x$  donc on peut calculer  $I_0(p)$  par la relation  $I_0(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^t$ .

$$\text{On a alors } I_0(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-pt}}{p}.$$

Or, avec les hypothèses sur  $\alpha$  et  $\omega$  ( $\alpha$  et  $\omega$  deux nombres réels strictement positifs), on sait d'après la question 2 que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0$ .

On en déduit alors le résultat à vérifier :  $I_0(p) = \frac{1}{p}$ .

**Question 5 (1 point) :** Démontrez que  $I_1(p) = \frac{1}{p^2}$ .

$$I_1(p) = \int_{0+}^{+\infty} t^1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{0+}^t x \cdot e^{-px} dx$$

On utilise le principe d'intégration par parties, sur l'intervalle  $[0, t]$  pour le produit des fonctions  $f(x)$ , dont une primitive est  $F(x)$ , et  $G(x)$ , dont la dérivée est  $g(x)$ .

On retrouve ce principe en partant de l'intégration sur l'intervalle  $[0, t]$  de la dérivée du produit  $F(x) \cdot G(x)$  :

$$\left[ F(x) \cdot G(x) \right]_0^t = \int_0^t f(x) \cdot G(x) dx + \int_0^t F(x) \cdot g(x) dx,$$

qui peut s'écrire encore sous la forme dite de formule de l'intégration par parties :

$$\int_0^t F(x) \cdot g(x) dx = \left[ F(x) \cdot G(x) \right]_0^t - \int_0^t f(x) \cdot G(x) dx.$$

En choisissant  $F(x) = x$  et  $g(x) = e^{-px}$ , on peut appliquer ce principe d'intégration directement en notant que l'on a alors  $f(x) = \frac{d}{dx} [F(x)] = 1$  et  $G(x) = \frac{-e^{-px}}{p}$  (à une constante près) :

$$I_1(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{0+}^t x \cdot e^{-px} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ x \cdot \frac{-e^{-px}}{p} \right]_0^t - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{0+}^t 1 \cdot \frac{-e^{-px}}{p} dx$$

Dans le second membre, le premier terme s'annule grâce à  $x$  en  $x = 0$  et grâce au résultat de la question 1 :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0$  (puisque  $\alpha > 0$ ). Et, le second terme correspond en fait à  $\frac{1}{p} \int_{0+}^{+\infty} e^{-px} dx$  donc à  $\frac{1}{p} \cdot I_0$ .

Au final on a donc :  $I_1(p) = \frac{1}{p} \cdot I_0 = \frac{1}{p^2}$

**Question 6 (1 point) :** Démontrez que  $I_2(p) = \frac{2}{p^3}$ .

On part de  $I_2(p) = \int_{0+}^{+\infty} t^2 \cdot e^{-pt} dt$

On réutilise du principe d'intégration par parties en choisissant  $F(x) = x^2$  et  $g(x) = e^{-px}$  car  $f(x) = 2x$  va permettre de faire apparaître  $I_1(p)$ . On a encore  $G(x) = \frac{-e^{-px}}{p}$  (à une constante près).

Dans ce nouveau cas, le principe d'intégration par parties s'écrit alors :

$$I_2(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{0+}^t x^2 \cdot e^{-px} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \cdot \frac{-e^{-px}}{p} \right]_0^t - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{0+}^t 2x \cdot \frac{-e^{-px}}{p} dx$$

qui s'écrit encore sous la forme :

$$I_2(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \cdot \frac{-e^{-px}}{p} \right]_0^t + \frac{2}{p} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{0+}^t x \cdot e^{-px} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \cdot \frac{-e^{-px}}{p} \right]_0^t + \frac{2}{p} \cdot I_1(p)$$

Pour des raisons analogues à celles invoquées à la question 5, le premier terme dans le second membre est nul et on a alors :  $I_2(p) = \frac{2}{p} \cdot I_1(p)$ .

Comme on a vu à la question 5 que  $I_1(p) = \frac{1}{p} \cdot I_0 = \frac{1}{p^2}$ , on en déduit le résultat demandé :

$$I_2(p) = \frac{2}{p} \cdot I_1 = \frac{2}{p^3}.$$

**Question 7 (1 point) :** Démontrez que  $I_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

On suppose que la proposition est vraie au rang  $n$ , donc que  $I_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$  et on part de la définition de  $I_{n+1}(p)$  :  $I_{n+1}(p) = \int_{0+}^{+\infty} t^{n+1} \cdot e^{-pt} dt$ .

On applique à nouveau le principe d'intégration par parties, en choisissant  $F(x) = x^{n+1}$  et  $g(x) = e^{-px}$ .

On en déduit que  $f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)] = (n+1) \cdot x^n$  et on a toujours  $G(x) = \frac{-e^{-px}}{p}$  (à une constante près).

Pour ce nouveau cas de figure, le principe d'intégration par parties s'écrit alors :

$$I_{n+1}(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{0+}^t x^{n+1} \cdot e^{-px} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ x^{n+1} \cdot \frac{-e^{-px}}{p} \right]_0^t - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{0+}^t (n+1) \cdot x^n \cdot \frac{-e^{-px}}{p} dx$$

qui se réécrit encore sous la forme :

$$I_{n+1}(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ x^{n+1} \cdot \frac{-e^{-px}}{p} \right]_0^t + \frac{n+1}{p} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{0+}^t x^n \cdot e^{-px} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ x^{n+1} \cdot \frac{-e^{-px}}{p} \right]_0^t + \frac{n+1}{p} \cdot I_n(p)$$

Pour des raisons analogues à celles invoquées à la question 5, le premier terme dans le second membre est nul et on a alors :  $I_{n+1}(p) = \frac{n+1}{p} \cdot I_n(p)$  et, par suite,  $I_{n+1}(p) = \frac{(n+1)!}{p^{n+2}}$ .

Ainsi, si la proposition est vraie au rang  $n$ , elle est encore vraie au rang suivant  $n+1$  ; cette proposition est donc héréditaire.

Grâce aux questions 4, 5 et 6, on sait que la propriété est vraie aux rangs 0, 1 et 2 et qu'elle est héréditaire. Au final, la relation de récurrence étudiée est donc bel et bien vérifiée :

$$I_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Problème 3 :** Dans le cadre d'une première approche, on considère des phénomènes physiques se produisant dans un plan euclidien doté d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de centre  $O(0, 0)$ . On considère aussi deux points  $S_1(0, H)$  et  $S_2(d, 2H)$  que l'on suppose associés à deux sources ponctuelles. Les coordonnées  $d$  et  $H$  correspondent à des nombres réels strictement positifs.

On considère aussi un point  $M(x, y)$  avec  $x$  et  $y$  deux coordonnées réelles strictement positives. Le point  $M$  correspond au point où les mesures sont effectuées.

**Hypothèse :** On suppose que chaque point source  $S_i$  émet un signal temporel  $s_i(t)$  qui donne lieu à l'apparition, en  $M$ , d'un signal temporel  $s_{M,i}(t) = s_i\left(t - \frac{S_i M}{c_0}\right)$ , où  $c_0$  correspond à un nombre réel strictement positif.

**Question 8 (1 point) :** A quel phénomène physique peut correspondre cette hypothèse ? Et, dans ce cas, à quoi correspond physiquement  $c_0$  ?

On constate que le signal  $s_{M,i}(t)$  correspond à l'observation au point  $M$ , situé à la distance  $S_i M$ , de la version retardée du retard  $\frac{S_i M}{c_0}$  du signal  $s_i(t)$  émis au point source  $S_i$ .

Cela pourrait correspondre à un phénomène de propagation d'ondes (progressives non dissipatives "aller" ou divergentes) "unidimensionnelles", auquel cas  $c_0$  correspondrait à la vitesse de propagation ou célérité de ces ondes.

Lorsque les deux sources  $S_1$  et  $S_2$  émettent de manière synchrone, on constate que le signal total mesuré au point  $M$  est défini par :

$$s_M(t) = s_1\left(t - \frac{S_1 M}{c_0}\right) + s_2\left(t - \frac{S_2 M}{c_0}\right).$$

**Question 9 (0,5 point) :** Quelle hypothèse physique peut être faite sur les phénomènes à l'œuvre compte-tenu de cette observation expérimentale ?

La mesure du signal total  $s_M(t)$ , en  $M$ , correspond à la somme des deux signaux émis respectivement en  $S_1$  et  $S_2$ .

On peut donc supposer que les signaux se superposent et donc l'hypothèse pouvant être faite est celle de la superposition des phénomènes.

**Question 10 (0,5 point) :** Déterminez les expressions de  $r_1 = S_1M$  et  $r_2 = S_2M$  en fonction de  $x, y, d$  et  $H$ .

On connaît les coordonnées des points :  $M(x, y)$ ,  $S_1(0, H)$  et  $S_2(d, 2H)$ . On peut donc en déduire directement les expressions des distances  $r_1$  et  $r_2$ .

$$r_1 = S_1M = \sqrt{(x-0)^2 + (y-H)^2} = \sqrt{x^2 + (y-H)^2}$$

$$r_2 = S_2M = \sqrt{(x-d)^2 + (y-2H)^2}$$

Dans la suite, on note  $\Delta r = r_2 - r_1$ . Et maintenant, on suppose, en plus, que les deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  émettent toutes les deux, toujours de manière synchrone, le même signal temporel  $s(t) = \underline{A}(\omega).e^{i\omega t}$  où  $\underline{A}(\omega)$  est une fonction à valeurs complexes dépendant de la pulsation  $\omega$  (réelle strictement positive).

**Question 11 (1 point) :** Démontrez que le signal total mesuré au point  $M$  s'écrit encore sous la forme :

$$s_M(t) = 2.s(t - \tau_1). \cos(\omega\tau_2)$$

avec  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux grandeurs réelles dont les expressions sont à déterminer.

On sait que  $s_{M,i}(t) = s_i\left(t - \frac{S_iM}{c_0}\right) = s_i\left(t - \frac{r_i}{c_0}\right)$ ,  $\forall i \in \{1, 2\}$ . De plus, on sait que les signaux émis depuis  $S_1$  et  $S_2$  sont synchrones et qu'ils sont égaux donc  $s_i(t) = s(t) = \underline{A}(\omega).e^{i\omega t}$ .

D'après les hypothèses, on a :

$$\begin{aligned} s_M(t) &= s_{M,1}(t) + s_{M,2}(t) \\ &= s\left(t - \frac{r_1}{c_0}\right) + s\left(t - \frac{r_2}{c_0}\right) \\ &= \underline{A}(\omega). \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r_1}{c_0}\right)\right) + \underline{A}(\omega). \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r_2}{c_0}\right)\right) \\ &= \underline{A}(\omega). \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r_1}{c_0}\right)\right). \left[1 + \exp\left(i\omega\frac{r_1 - r_2}{c_0}\right)\right] \\ &= \underline{A}(\omega). \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r_1}{c_0}\right)\right). \left[1 + \exp\left(-i\omega\frac{\Delta r}{c_0}\right)\right] \\ &= \underline{A}(\omega). \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r_1}{c_0} - \frac{\Delta r}{2c_0}\right)\right). \left[\exp\left(i\omega\frac{\Delta r}{2c_0}\right) + \exp\left(-i\omega\frac{\Delta r}{2c_0}\right)\right] \\ &= 2.\underline{A}(\omega). \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r_1}{c_0} - \frac{\Delta r}{2c_0}\right)\right). \cos\left(\omega\frac{\Delta r}{2c_0}\right) \\ s_M(t) &= 2.s\left(t - \left(\frac{r_1}{c_0} + \frac{\Delta r}{2c_0}\right)\right). \cos\left(\omega\frac{\Delta r}{2c_0}\right) \end{aligned}$$

On a donc bien  $s_M(t) = 2.s(t - \tau_1). \cos(\omega\tau_2)$  avec :

- $\tau_1 = \frac{r_1}{c_0} + \frac{\Delta r}{2c_0} = \frac{r_1 + r_2}{2c_0}$  ;
- $\tau_2 = \frac{\Delta r}{2c_0}$ .

On introduit le gain  $G(\omega)$  défini par le rapport des modules des deux signaux :  $G(\omega) = \frac{|s_M(t)|}{|s(t)|}$ .

**Question 12 (0,5 point) :** Proposez un tracé de l'allure du gain  $G(\omega)$  en fonction de  $\omega$  et de  $\tau_2$ .

$$\text{On a } G(\omega) = \frac{|s_M(t)|}{|s(t)|} = \frac{|2 \cdot \underline{A}(\omega) \cdot \exp(i\omega(t - \tau_1)) \cdot \cos(\omega\tau_2)|}{|\underline{A}(\omega) \cdot \exp(i\omega t)|} = 2 \cdot |\cos(\omega\tau_2)|$$

On peut donc tracer, en fonction de  $\omega\tau_2$  plutôt que de  $\omega$ , les évolutions de  $|G(\omega)|$  qui correspondent au tracé de deux fois le cosinus redressé d'angle  $\omega\tau_2$ .

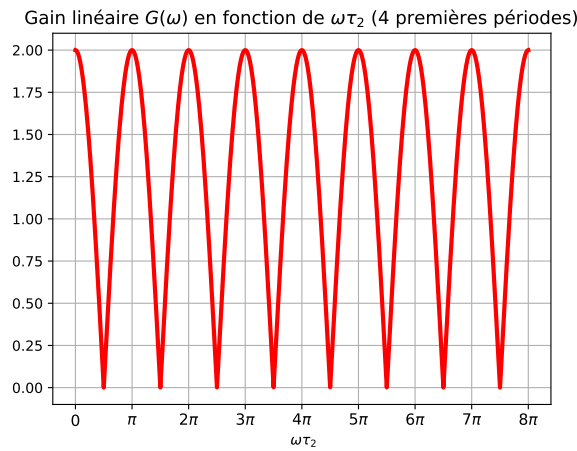


FIGURE 1 – Tracé du gain linéaire  $G(\omega)$  en fonction de la variable sans dimension  $\omega\tau_2$ .

**Question 13 (0,5 point) :** Quel est le phénomène physique que l'on observe pour le signal capté au point M ?

Le gain présente des ondulations périodiques en fonction de  $\omega\tau_2$  associées au tracé d'un cosinus redressé, avec des nœuds et des ventres. On a des interférences qui dépendent de la variable  $\omega\tau_2$ , avec des interférences constructives pour les ventres et destructrices pour les nœuds. Du point de vue du signal capté, on a ce que l'on nomme filtrage en peigne.

**Question 14 (0,5 point) :** Si la position relative de la source ponctuelle  $S_2$  par rapport à la source ponctuelle  $S_1$  ne peut pas être modifiée, quelle opération peut-on réaliser pour obtenir un gain constant, quelle que soit  $\omega$ , pour une position fixe choisie du point de mesure M ?

Il faut retarder le signal qui arrive en premier au point  $M$  pour que les deux signaux arrivent en  $M$  de manière synchrone. Si  $\Delta r = r_2 - r_1 > 0$ , le signal émis en  $S_1$  arrive avant celui émis en  $S_2$  donc il faut retarder le signal émis en  $S_1$  de  $\frac{\Delta r}{c_0}$ . Dans le cas contraire ( $\Delta r = r_2 - r_1 < 0$ ), c'est le signal émis en  $S_2$  qui doit être retardé de  $-\frac{\Delta r}{c_0}$ .

**Problème 4 :** On considère les deux fonctions de transfert  $H_1(\nu) = \frac{1}{1 + i\nu}$  et  $H_2(\nu) = \frac{i\nu}{1 + i\nu}$  de la pulsation réduite  $\nu = \frac{\omega}{\omega_c}$ , où  $\omega$  correspond à la pulsation variable mais réelle et strictement positive et  $\omega_c$  à la pulsation de coupure de ces deux filtres, réelle et strictement positive.

**Question 15 (0,5 point) :** A quels types de filtres correspondent respectivement ces deux fonctions de transfert ?

Les deux filtres sont des filtres (analogiques) d'ordre 1.

$H_1(\nu)$  tend vers 1 quand  $\nu$  tend vers 0, et son module tend vers 0 quand  $\nu$  tend vers  $+\infty$ . Comme c'est un filtre du premier ordre, on en déduit qu'il s'agit d'un filtre passe-bas.

Le module de  $H_2(\nu)$  tend vers 0 quand  $\nu$  tend vers 0, et vers 1 quand  $\nu$  tend vers  $+\infty$ . Comme c'est un filtre du premier ordre, on en déduit qu'il s'agit d'un filtre passe-haut.

**Question 16 (0,5 point) :** Quelle transformation, dépendant de  $i\nu$ , permet de transformer  $H_1(\nu)$  en  $H_2(\nu)$  ?

On a  $H_1(\nu) = \frac{1}{1 + i\nu}$  et  $H_2(\nu) = \frac{i\nu}{1 + i\nu}$ . On remarque que la transformation  $i\nu \rightarrow \frac{1}{i\nu}$  permet de transformer  $H_1(\nu)$  en  $H_2(\nu)$ .

La transformation recherchée est donc :  $i\nu \rightarrow \frac{1}{i\nu}$ .

On considère maintenant le filtre passe-bas d'ordre 2 défini par  $H_3(\nu) = \frac{1}{(1 + i\nu)^2}$ .

**Question 17 (0,5 point) :** En utilisant la transformation trouvée à la question 16, déterminez l'expression de la fonction de transfert, que l'on notera  $H_4(\nu)$ , pour le filtre passe-haut associé à  $H_3(\nu)$ .

Si on utilise la transformation de la question 16 :  $i\nu \rightarrow \frac{1}{i\nu}$  pour  $H_3(\nu)$ , on a alors :

$$H_4(\nu) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{i\nu}\right)^2} = \frac{(i\nu)^2}{(i\nu + 1)^2} = \frac{-\nu^2}{(1 + i\nu)^2} \left( = -\nu^2 \cdot H_3(\nu) \right)$$

**Question 18 (0,5 point) :** Que se passe-t-il pour  $H_3(\nu) + H_4(\nu)$  pour la pulsation de coupure ?

D'abord, on a :  $H_3(\nu) + H_4(\nu) = H_3(\nu) - \nu^2 \cdot H_3(\nu) = (1 - \nu^2) \cdot H_3(\nu) = \frac{1 - \nu^2}{(1 + i\nu)^2}$ .

Ensuite, puisque  $\nu = \frac{\omega}{\omega_c}$ , si on étudie ce qui se passe pour la pulsation de coupure ( $\omega = \omega_c$ ), cela signifie que l'on étudie en fait ce qui se passe pour  $\nu = 1$ . On a alors :  $H_3(1) + H_4(1) = \frac{1 - 1}{(1 + i)^2} = 0$ .

Ainsi, la somme de ces deux filtres conduit à un gain nul pour la pulsation de coupure.

On a donc une annulation totale pour la pulsation de coupure, donc un gain en décibels tendant vers  $-\infty$ .

**Problème 5 :** En acoustique, dans le cadre d'une première approche, on suppose que l'air se comporte comme un gaz parfait et on définit, en chaque point du milieu considéré, notamment des champs de pression  $p$ , de masse volumique  $\rho$  et de température absolue  $T$ . Pour un gaz parfait, ces trois grandeurs sont supposées reliées par la loi  $p \cdot \rho^{-1} = r \cdot T$  où  $r = R/M$  avec  $R$  la constante molaire des gaz parfaits et  $M$  la masse molaire de l'air. On note  $\gamma$ , la constante des gaz parfaits définie comme le rapport des capacités massiques à pression constante  $c_p$  et à volume constant  $c_v$  ( $\gamma = \frac{c_p}{c_v} \approx 1,4$  pour l'air). On suppose que toutes ces grandeurs physiques sont associées à des différentielles totales exactes :  $dp$  pour la pression,  $d\rho$  pour la masse volumique et  $dT$  pour la température absolue.

On considère le modèle de transformation thermodynamique défini par la relation  $p \cdot \rho^{-k} = \text{cste}$  où  $k$  est un nombre réel.

**Question 19 (1,5 point) :** Déterminez la relation liant les différentielles  $dp$  et  $d\rho$  si on se place dans le cadre d'une transformation thermodynamique obéissant au modèle de transformation thermodynamique précédent.

Si on considère le logarithme (népérien) du modèle de transformation thermodynamique, on a alors :  $\ln p - k \cdot \ln \rho = \text{cste}_2$ .

Si on effectue une différentiation logarithmique de l'équation précédente,  $\ln p$  est alors remplacé par  $\frac{dp}{p}$ ,  $\ln \rho$  par  $\frac{d\rho}{\rho}$  et la constante  $\text{cste}_2$  par 0.

La différentiation logarithmique de l'équation précédente conduit alors à l'équation suivante reliant les différentielles  $dp$  et  $d\rho$  (supposées infinitésimales ou vraiment très petites respectivement par rapport à  $p$  et  $\rho$ ) :

$$\frac{dp}{p} - k \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Au final, la relation recherchée liant les différentielles  $dp$  et  $d\rho$  s'écrit :  $dp = k \cdot p \cdot \rho^{-1} \cdot d\rho$ .

**Question 20 (0,5 point) :** Quelle valeur de  $k$  faut-il choisir pour modéliser une transformation isobare ?

Comme la transformation isobare correspondant aux relations  $p = \text{cste}$  ou  $dp = 0$ , on déduit rapidement du modèle ou de la relation trouvée à la question 19 que la transformation isobare est associée au choix de  $k = 0$ .

**Question 21 (0,5 point) :** Quelle valeur de  $k$  faut-il choisir pour modéliser une transformation isotherme ?

Une transformation isotherme correspond notamment à la relation  $T = \text{cste}$ .

Or, on suppose que le gaz se comporte comme un gaz parfait et qu'il obéit donc à la loi  $p \cdot \rho^{-1} = r \cdot T$ .

Ainsi, si la température est constante, alors on doit avoir  $p \cdot \rho^{-1} = \text{cste}$ .

Or, pour le modèle  $p \cdot \rho^{-k} = \text{cste}$  considéré pour la transformation thermodynamique, cela correspond au choix de  $k = 1$ .

Au final, pour modéliser une transformation isotherme avec le modèle envisagé, on doit donc choisir  $k = 1$ .

**Question 22 (2 points) :** Quelle valeur de  $k$  faut-il choisir pour que l'on obtienne la relation  $dp = \gamma \cdot r \cdot T \cdot d\rho$  reliant les deux différentielles  $dp$  et  $d\rho$  ?

A la question 19, on a trouvé que la relation liant les différentielles  $dp$  et  $d\rho$  s'écrit :  $\frac{dp}{p} = k \cdot \frac{d\rho}{\rho}$ .

On peut réécrire cette relation sous la forme  $dp = k \cdot p \cdot \rho^{-1} \cdot d\rho$  et, on constate alors que, par rapport à la relation recherchée, on doit avoir  $k \cdot p \cdot \rho^{-1} = \gamma \cdot r \cdot T$ .

Or, d'après la loi des gaz que l'on a supposée valide pour décrire le problème étudié, on a  $p \cdot \rho^{-1} = r \cdot T$ .

On en déduit qu'il faut choisir  $k = \gamma$  pour obtenir la relation recherchée.

**Question 23 (1 point) :** Quelle est alors la nature de la transformation thermodynamique de la question 22 ?

Le choix de  $\gamma$  pour  $k$  trouvée à la question 22 permet de réécrire le modèle de transformation thermodynamique sous la forme  $p \cdot \rho^{-\gamma} = \text{cste}$ .

Or, cette relation correspond à la loi (ou relation) de Laplace, permettant de décrire une transformation adiabatique réversible.

La transformation thermodynamique de la question 22 correspond donc à la modélisation d'une transformation adiabatique réversible.